Łomża, dn. 25 maja 2017 r.

F I N A Ł

1. Równanie trzech zmiennych:
$$x^2 + y^2 = z^2$$
ma piękny związek z równaniem Pitagorasa. Parametryczna forma rozwiązania tego równania zaproponowana przez Diofantosa ma postać:
$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2,$$
gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Ile rozwiązań ma to równanie? Jedno czy więcej? Przytocz swoje rozwiązanie (jedno lub więcej).
2. W pewnym rombie suma długości przekątnych wynosi $2d$, zaś obwód jest równy $2p$. Oblicz pole tego rombu.
3. W prostokątnym układzie współrzędnych narysowano pewien trójkąt. Współrzędne wszystkich jego wierzchołków są liczbami całkowitymi. Udowodnić, ze jeśli a, b, c są długościami boków, zaś R promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, to
$$abc \geq 2R,$$
Czy założenie, że współrzędne wierzchołków są liczbami całkowitym jest istotne?
4. Niech S oznacza średnią arytmetyczną wszystkich dzielników liczby naturalnej n. Udowodnić, że:
$$\sqrt{n} \leq S \leq \frac{n+1}{2}.$$
5. Na poniższym rysunku zaznaczono niektóre punkty spełniające równanie paraboli $y = x^2$. Połącz narysowane punkty ze wszystkimi zaznaczonymi punktami po drugiej stronie osi Ox. Rysunek możesz przedłużyć. Jeśli usuniemy wszystkie te punkty przez które te narysowane odcinki przechodzą, to pozostanie jeszcze pewien specjalny ciąg liczb. Co to za liczby?